مبرهنة: لتكن A جبر فوق الحلقات التبديلية والواحدية A ولتكن $d: A \to A$: تطبيق اشتقاق على A و $n \in \mathbb{N}$ و $x, y \in A$ حيث:

$$d^n(x.y) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} d^r(x) . d^{n-r}(x)$$

البرهان:

بالاستقراء حسب n

من أجل $n=1$

$$d(x.y) = d(x).y + x.dy$$

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} d^r(x) . d^{n-r}(x) = \binom{1}{0} d^0(x) . d(x) . y = x\,dy + dx\,y$$

نفترض أن المساواة صحيحة لأجل العدد K

$$d^K(x.y) = \sum_{r=0}^{K} \binom{K}{r} d^r(x) . d^{K-r}(y)$$

ولنثبت أنها صحيحة من أجل $K+1$ أي لنثبت أن

$$d^{K+1}(x.y) = \sum_{r=0}^{K+1} \binom{K+1}{r} d^r(x) . d^{K+1-r}(y)$$

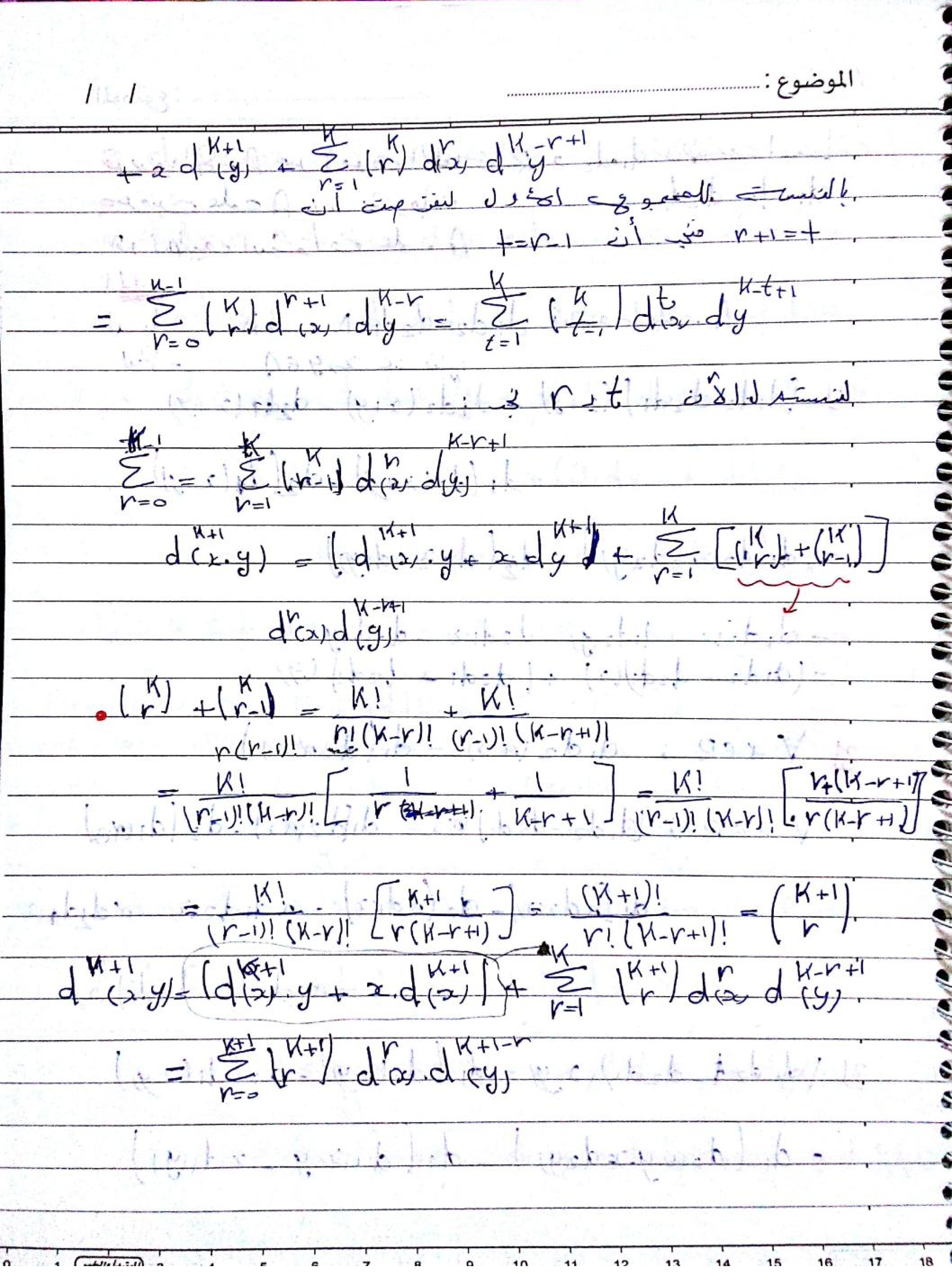
$$d^{K+1}(x.y) = d\left[d^K(x.y)\right] = d\left[\sum_{r=0}^{K} \binom{K}{r} d^r(x) . d^{K-r}(y)\right]$$

$$= \sum_{r=0}^{K} \binom{K}{r} d\left(d^r(x) . d^{K-r}(y)\right)$$

$$= \sum_{r=0}^{K} \binom{K}{r} \left[d^{r+1}(x) . d^{K-r}(y) + d^r(x) . d^{K-r+1}(y)\right]$$

$$= \sum_{r=0}^{K} \binom{K}{r} d^{r+1}(x) d^{K-r}(y) + \sum_{r=0}^{K} \binom{K}{r} d^r(x) d^{K-r+1}(y)$$

$$= d^{K+1}(x) . y \qquad + \sum_{r=0}^{K-1} \binom{K}{r} d^{K+1}(x) d^{K-r}(y)$$



الموضوع : .... / /

$$+ x\, d^{K+1}_{(y)} + \sum_{r=1}^{K} \binom{K}{r} d^{r}_{(x)}\, d^{K-r+1}_{y}$$

بالنسبة للمجموع الأول لنفرض أن

$t = r - 1$ منه أن $r + 1 = t$

$$= \sum_{r=0}^{K-1} \binom{K}{r} d^{r+1}_{(x)} \cdot d_{y}^{K-r} = \sum_{t=1}^{K} \binom{K}{t-1} d^{t}_{(x)}\, d_{y}^{K-t+1}$$

لنستبدل الآن t بـ r :

$$\sum_{r=0}^{K-1} = \sum_{r=1}^{K} \binom{K}{r-1} d^{r}_{(x)}\, d^{K-r+1}_{(y)}$$

$$d^{K+1}(x.y) = \left(d^{K+1}_{(x)} \cdot y + x\, d^{K+1}_{y} \right) + \sum_{r=1}^{K} \left[\binom{K}{r} + \binom{K}{r-1} \right] d^{r}_{(x)}\, d^{K-r+1}_{(y)}$$

$$\binom{K}{r} + \binom{K}{r-1} = \frac{K!}{r!\,(K-r)!} + \frac{K!}{(r-1)!\,(K-r+1)!}$$

$r(r-1)!$

$$= \frac{K!}{(r-1)!\,(K-r)!} \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{K-r+1} \right] = \frac{K!}{(r-1)!\,(K-r)!} \left[\frac{r + (K-r+1)}{r(K-r+1)} \right]$$

$$= \frac{K!}{(r-1)!\,(K-r)!} \left[\frac{K+1}{r(K-r+1)} \right] = \frac{(K+1)!}{r!\,(K-r+1)!} = \binom{K+1}{r}$$

$$d^{K+1}_{(x.y)} = \left(d^{K+1}_{(x)} \cdot y + x \cdot d^{K+1}_{(x)} \right) + \sum_{r=1}^{K} \binom{K+1}{r} d^{r}_{(x)}\, d^{K-r+1}_{(y)}$$

$$= \sum_{r=0}^{K+1} \binom{K+1}{r} d^{r}_{(x)} \cdot d^{K+1-r}_{(y)}$$

تمرين: ليكن A جبر أموفق الحلقات R و d_1, d_2 تطبيقي اشتقاق معرفين على A عند بين أن $d_1 d_2 - d_2 d_1$ هو تطبيق اشتقاق على A

الحل:

لدينا $d_1 d_2 - d_2 d_1 : A \longrightarrow A$ تطبيق على A

ليكن $x, y \in A$ عند بين:

1) $[d_1 d_2 - d_2 d_1](x+y) = d_1 d_2 (x+y) - d_2 d_1 (x+y)$

$= d_1 (d_2 (x+y)) - d_2 (d_1 (x+y))$

$= d_1 (d_2(x) + d_2(y)) - d_2 (d_1(x) + d_1(y))$

$= d_1 d_2 (x) + d_1 d_2 (y) - d_2 d_1 (x) - d_2 d_1 (y)$

$= (d_1 d_2 - d_2 d_1)(x) + (d_1 d_2 - d_2 d_1)(y)$

2) $\forall \alpha \in R ; \; d_1 d_2 (\alpha x) = d_1 (d_2 \alpha x)$

$\forall \alpha \in R ; \; (d_1 d_2 - d_2 d_1)(\alpha x) = d_1 [d_2 (\alpha x)] - d_2 (d_1 (\alpha x))$

$= d_1 [\alpha d_2 (x)] - d_2 (\alpha d_1 (x)) = \alpha d_1 d_2 (x) - \alpha d_2 d_1 (x)$

$= \alpha (d_1 d_2 - d_2 d_1)(x)$

3) $(d_1 d_2 - d_2 d_1)(x.y) = d_1 (d_2 (x.y)) - d_2 (d_1 (x.y))$

$= d_1 (d_2(x).y + x d_2(y)) - d_2 (d_1(x) y + x d_1(y))$

$= d_1(d_2(x).y) + d_1(x\,d_2(y)) - d_2(d_1(x).y) - d_2(x\,d_1(y))$

$= d_1d_2(x)\,y + d_2(x)\,d_1(y) + d_1(x)\,d_2(y) + x\,d_1d_2(y)$

$- d_2d_1(x)\,y - d_1(x)\,d_2(y) - d_2(x)\,d_1(y) - x\,d_2d_1(y)$

$= (d_1d_2(x) - d_2d_1(x))\,y + x\,(d_1d_2(y) - d_2d_1(y))$

$= (d_1d_2 - d_2d_1)(x).y + x\,(d_1d_2 - d_2d_1)(y)$

إذا $d_1d_2 - d_2d_1$ هو تطبيق اشتقاق.

ملاحظة: نرمز للتطبيق الاشتقاقي $d_1d_2 - d_2d_1$ بالشكل: $[d_1, d_2]$

مبرهنة: ليكن A جبر آ فوق الحلقة R، إذاً المجموعة $Der(A)$ تشكل جبر آ فوق R بالنسبة للعملية «العملية المركب الأتية»

$[\ ;\ ] : Der(A) \times Der(A) \longrightarrow Der\,A$

$(d_1, d_2) \longmapsto [d_1, d_2]$

البرهان: ليكن $\alpha \in R$ ، $d_1, d_2 \in Der\,A$

1) لنبرهن أن $\alpha[d_1, d_2] = [\alpha d_1, d_2] = [d_1, \alpha d_2]$

$\forall x \in A ;\ \alpha[d_1, d_2](x) = \alpha(d_1d_2 - d_2d_1)(x)$

$= \alpha(d_1d_2(x) - d_2d_1(x)) = \alpha d_1d_2(x) - (\alpha d_2)d_1(x)$

$= d_1(\alpha d_2(x)) - (\alpha d_2)(d_1(x)) = d_1(\alpha d_2(x)) - (\alpha d_2)(d_1(x))$

$= (d_1(\alpha d_2) - (\alpha d_2)d_1)(x)$

$\alpha[d_1, d_2] = [d_1, \alpha d_2]$

بنفس الطريقة نبرهن على أن

$\alpha[d_1, d_2] = [\alpha d_1, d_2]$

2) ليكن $d_1, d_2, d_3 \in Der(A)$

ولنبرهن أن: $[d_1, d_2 + d_3] = [d_1, d_2] + [d_1, d_3]$

$\forall x \in A: [d_1, d_2+d_3](x) = [d_1(d_2+d_3) - (d_2+d_3)d_1](x)$

$= d_1(d_2+d_3)(x) - (d_2+d_3)d_1(x)$

$= d_1[(d_2+d_3)(x)] - (d_2(d_1(x)) + d_3 d_1(x))$

$= d_1(d_2(x) + d_3(x)) - (d_2)(d_1(x)) - d_3 d_1(x)$

$= d_1 d_2(x) + d_1 d_3(x) - d_2 d_1(x) - d_2 d_3(x)$

$= (d_1 d_2 - d_2 d_1)(x) + (d_1 d_2 - d_2 d_1)(x)$

$= [d_1, d_2](x) + [d_1, d_3](x)$

$([d_1, d_2] + [d_1, d_3])(x)$

إذن:

$[d_1, d_2+d_3] = [d_1, d_2] + [d_1, d_3]$

بنفس الطريقة نبرهن أن

$[d_1 + d_2, d_3] = [d_1, d_3] + [d_2, d_3]$

* جبور لي:

* تعريف: لتكن R حلقة تبديلية وواحدية، نقول عن الزمرة التبديلية $(A,+)$ أنها جبر لي فوق R إذا حققت الشروط:

1- A معدول فوق R.

2- توجد عملية ضرب داخلي

$$[\,,\,] : A\times A \longrightarrow A$$

$$(x,y) \longmapsto [x,y]$$

تحقق الشروط الآتية:

- $\forall x\in A;\ [x,x]=0$
- $\forall \alpha\in R,\ x,y\in A;\ \alpha[x,y]=[\alpha x,y]=[x,\alpha y]$
- $\forall x,y,z\in A;\ [x,y+z]=[x,y]+[x,z]$

$$[x+y,z]=[x,z]+[y,z]$$

- $\forall x,y,z\in A;$

$$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$$

* تعريف: نقول عن جبر لي A فوق الحلقة R أنه تبديلي إذا حقق: $\forall x,y\in A;\ [x,y]=0$

* تعريف: ليكن A، B جبري لي فوق الحلقة R نقول عن الدالة $f: A \longrightarrow B$ أنه تشاكل جبور لي إذا كان:

- $\forall x,y\in A,\ f(x+y)=f(x)+f(y)$

- $\forall \alpha\in R,\ x\in A;\ f(\alpha x)=\alpha f(x)$

- $\forall x,y\in A;\ f([x,y])=[f(x),f(y)]$

*تعريف: ليكن A جبر لي فوق الحلقة R ، نقول أن العنصر $e\in A$ أنه محايد من اليمين إذا كان:

$$\forall x\in A;\ [x,e]=x$$

*تمهيدية: ليكن A جبر لي فوق الحلقة R عندئذ:

1) $\forall x,y\in A;\ [x,y]=-[y,x]$

2) $\forall x\in A;\ [x,0]=0$

3) $\forall x,y,z\in A;\ [x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$

$[x,[y,z]]=[y,[x,z]]+[z,[y,x]]$

البرهان:

1) ليكن $x,y\in A$ لدينا

$$[x+y,x+y]=0$$

$$[x+y,x]+[x+y,y]=0$$

$$[x,x]+[x,y]+[y,x]+[y,y]=0$$

$$[x,y]=-[y,x]$$

2)

$$0=[x,x]=[x,0+x]=[x,0]+[x,x]=0$$

$$[x,0]=0$$

3) واضح من التعريف

*تمرين: كل جبر لي يحوي عنصر محايد من اليمين يساوي الصفر.

الحل:

ليكن A جبر لي فوق الحلقة R وليكن $e\in A$ عنصر محايد من اليمين.

عندئذ:

$$e=[e,e]=0$$

$$\forall x\in A;\ x=[x,e]=[x,0]=0$$

$$\Leftarrow A=0$$

تطبيقات الاشتقاق على جبر لي:

تعريف: ليكن A جبر لي نسمي التطبيق f $f: A \to A$
تطبيق اشتقاق على A اذا حققت الشروط:

$$\forall x, y \in A \; ; \; f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \; x \in A \; ; \; f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

$$\forall x, y \in A \; ; \; f([x, y]) = [f(x), y] + [x, f(y)]$$

نرمز لمجموعة تطبيقات الاشتقاق المعرفة على جبر لي
بالشكل: $Der(A)$

انتهت المحاضرة ~ ~ ~

Oscar.